2º SEMINÁRIO INTERNACIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
de 20 a 22 de agosto de 2025
E-book
DOI: https://doi.org/10.48195/siecm2025.29369
ISBN: 978-65-5852-467-0
Unindo Fronteiras: Ciência, Tecnologia e Inovação no Ensino de Ciências e Matemática

A METODOLOGIA DE PESQUISA BASEADA EM DESIGN NO ENSINO DE INTEGRAIS: ANÁLISE DE DOIS CICLOS

Ismael Batista Maidana Silvestre [1]
Vanilde Bisognin [2]

Ensino de Ciências e Matemática: Ensino Superior

Resumo

Este artigo tem como objetivo analisar e comparar os resultados de dois ciclos de uma intervenção didática fundamentada na Metodologia de Pesquisa Baseada em Design (PBD), voltada ao ensino das integrais de Riemann e de Lebesgue. A intervenção foi aplicada em turmas distintas da disciplina Fundamentos de Análise Matemática, de um curso de licenciatura em Matemática, nos anos de 2022 e 2023. Com base na teoria da Imagem do Conceito e Definição do Conceito, bem como em princípios de design previamente estabelecidos, foram propostas atividades voltadas ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado. A análise dos dados foi feita por meio da categorização das imagens conceituais em três níveis, permitindo identificar avanços na compreensão dos estudantes. Os resultados apontam que os refinamentos realizados entre os ciclos contribuíram para a evolução conceitual dos alunos, evidenciando o potencial da PBD em promover melhorias contínuas no ensino de Matemática.

Palavras-Chave: Integral de Riemann. Integral de Lebesgue. Primitivas. Pensamento Matemático Avançado. Imagem e Definição do Conceito.

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo e Análise Real tem sido historicamente reconhecido como um desafio persistente na formação de professores de Matemática. Dentre os conteúdos que geram maior dificuldade destacam-se as integrais de Riemann e de Lebesgue, cujos aspectos conceituais envolvem níveis sofisticados de abstração e generalização matemática. Estudos nacionais e internacionais apontam que os estudantes, em geral, operam de forma mecanizada com procedimentos e técnicas, mas encontram obstáculos na construção de compreensões conceituais profundas e na articulação entre diferentes registros de representação matemática (González-Martín, 2006; Reis, 2015; Menoncini, 2018).

A análise de questões do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), especialmente no tema de integrais, evidencia um desempenho consistentemente baixo por parte dos estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática, o que tem levado à classificação da integral de Riemann como um

[1] silvestreismaeljb@yahoo.com.br
[2] vanilde@ufn.edu.br

conteúdo de alta dificuldade ao longo de diferentes edições da avaliação. Esse contexto revela um problema educacional sistêmico, o que reforça a importância de buscar alternativas pedagógicas que contribuam para uma aprendizagem conceitual e significativa.

Neste cenário, a Metodologia de Pesquisa Baseada em Design (PBD) se apresenta como um caminho promissor para investigar problemas educacionais complexos e desenvolver soluções contextualizadas. Segundo Plomp (2007), a PBD envolve ciclos de análise de problemas, concepção, implementação, avaliação e refinamento de intervenções educacionais, com o objetivo de gerar conhecimento prático e teórico. A abordagem permite responder a questões sobre o que funciona, como e por que, em contextos reais de ensino.

A presente pesquisa, orientada pela PBD e ancorada na teoria de Imagem do Conceito e Definição do Conceito (Tall; Vinner, 1981), propôs uma intervenção didática estruturada em dois ciclos, aplicada em turmas distintas da disciplina de Fundamentos de Análise Matemática, em um curso de licenciatura em Matemática de uma instituição pública do interior do estado do Rio Grande do Sul. A análise dos resultados foi orientada por uma categorização própria dos níveis de imagem do conceito, permitindo observar a evolução dos estudantes e o impacto dos refinamentos realizados entre as versões do produto educacional.

Portanto, o objetivo deste trabalho é analisar comparativamente os resultados dos dois ciclos da intervenção, destacando as contribuições dos refinamentos realizados para a aprendizagem dos conceitos de integrais de Riemann e de Lebesgue.

2 METODOLOGIA

A pesquisa adota a Metodologia de Pesquisa Baseada em Design (PBD), conforme delineada por Plomp (2007), a qual prevê o desenvolvimento e o estudo sistemático de intervenções educacionais em contextos reais, com vistas à resolução de problemas práticos e à construção de conhecimento teórico. O processo foi estruturado em dois ciclos de aplicação, contemplando as etapas de Análise Preliminar, Prototipagem (concepção e aplicação) e Avaliação.

A PBD valoriza o trabalho colaborativo entre o pesquisador e os profissionais que atuam diretamente no local da aplicação. Por essa razão, foi constituído um grupo

de colaboração composto pelo pesquisador e professores das disciplinas de Cálculo e Análise do curso de licenciatura em Matemática em estudo. Esse grupo teve papel fundamental em todas as etapas da pesquisa, participando da formulação dos princípios de design, elaboração e validação das atividades, acompanhamento da aplicação e discussão dos refinamentos realizados após o primeiro ciclo.

A construção da proposta didática foi orientada por princípios de design elaborados a partir da revisão da literatura, das bases teóricas mobilizadas na pesquisa e da experiência prática dos profissionais do grupo de colaboração. Esses princípios funcionaram como diretrizes estruturantes para a elaboração das atividades de cada unidade e, também, para a tomada de decisões durante os refinamentos entre os dois ciclos.

Entre os princípios formulados, destacam-se: (1) considerar as dificuldades conceituais relacionadas aos conhecimentos prévios dos estudantes; (2) articular o uso de software com atividades em lápis e papel, evidenciando as potencialidades e limitações de cada meio; (3) valorizar representações gráficas na construção de significados; (4) explicitar a matemática como campo em constante evolução; (5) utilizar a noção de área como raiz cognitiva para o ensino da integral de Riemann; (6) propor atividades que favoreçam a busca por padrões, abstrações e generalizações; e (7) organizar a sequência de atividades em uma progressão que leve à construção e compreensão dos conceitos abordados.

O produto educacional foi inicialmente composto por três unidades didáticas: (1) Integral de Riemann, (2) Primitivas e (3) Integral de Lebesgue. Cada unidade contava, no primeiro ciclo, com oito atividades. No segundo ciclo, houve redução e reorganização dessas atividades, visando à melhor adequação ao tempo disponível, maior clareza conceitual e equilíbrio entre profundidade e viabilidade didática.

A pesquisa foi conduzida no curso de licenciatura em Matemática de uma instituição pública do interior do Rio Grande do Sul, na disciplina de Fundamentos de Análise Matemática. Participaram estudantes de turmas distintas nos anos de 2022 (primeiro ciclo) e 2023 (segundo ciclo). Em 2022 foram 9 estudantes que participaram da pesquisa. Para a aplicação, organizamos 4 duplas e um estudante trabalhou individualmente (D1, D2, D3, D4 e E1). Já em 2023, foram 6 estudantes, portanto organizamos 3 duplas para a aplicação (D1, D2 e D3). Em ambos os ciclos, os dados foram coletados por meio de observações em sala de aula, registros em diário de

campo do pesquisador e dos docentes responsáveis pela disciplina em cada ano, além das produções escritas dos estudantes.

A análise dos dados foi orientada pela teoria da Imagem e Definição do Conceito (Tall; Vinner, 1981) e utilizou uma categorização dos níveis de imagem do conceito – Inicial, Intermediário e Avançado – desenvolvida no âmbito da presente pesquisa. A comparação entre os dois ciclos teve como objetivo identificar avanços na construção das imagens conceituais e compreender os efeitos dos refinamentos realizados entre as versões do produto educacional.

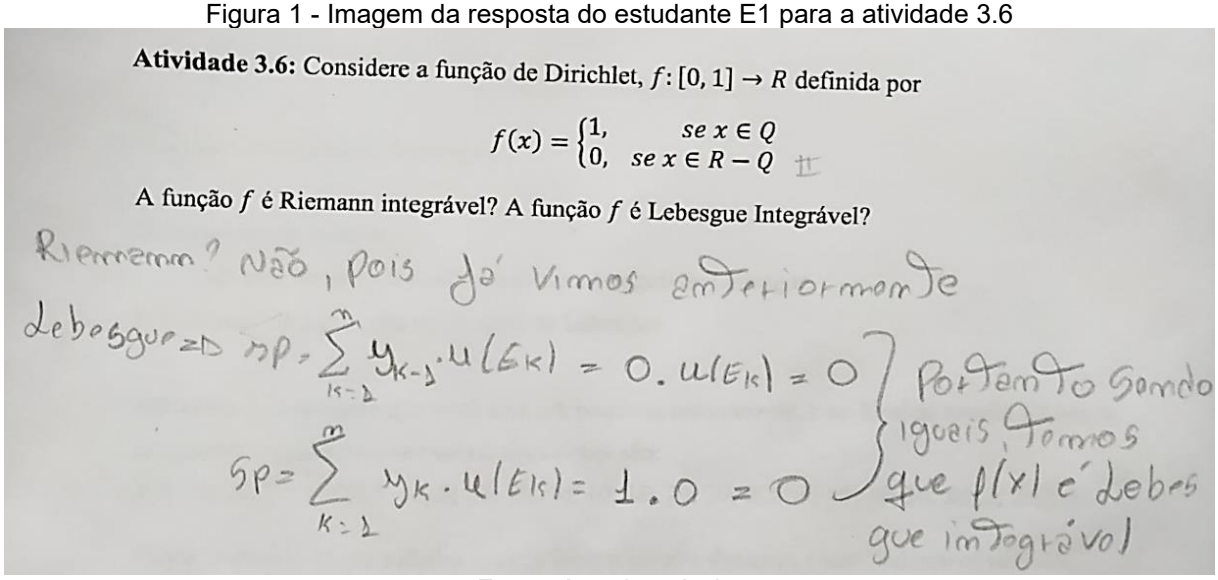
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta os principais resultados obtidos a partir da aplicação da proposta didática em dois ciclos distintos. O primeiro ciclo permitiu observar aspectos promissores da proposta, bem como limitações que indicaram a necessidade de ajustes. Já o segundo ciclo incorporou refinamentos resultantes da análise inicial e possibilitou avanços qualitativos nas compreensões conceituais dos estudantes. Ao final, é apresentada uma comparação entre os dois momentos, destacando os efeitos pedagógicos das modificações implementadas.

3.1 PRIMEIRO CICLO: APLICAÇÃO E RESULTADOS

O primeiro ciclo da intervenção foi realizado no segundo semestre de 2022. Observou-se um bom envolvimento dos estudantes na realização das atividades e na compreensão dos conceitos. A Atividade 3.6, por exemplo, abordava a função de Dirichlet, desafiando os estudantes a analisarem sua integrabilidade e refletirem sobre os limites da definição de integral de Riemann. Essa tarefa foi especialmente relevante para promover o contraste entre diferentes concepções de integral e para evidenciar a necessidade de uma definição mais abrangente, como a proposta por Lebesgue. Na Figura 1 é possível visualizar a resposta do estudante E1.

Figura 1 - Imagem da resposta do estudante E1 para a atividade 3.6



Fonte: Autoria própria.

Do ponto de vista das imagens do conceito classificamos essa resposta no nível Avançado. No Quadro 1 destacamos as principais evidências que caracterizam essa imagem nesse nível.

Quadro 1 - Análise da resposta do estudante E1 para a atividade 3.6

Termo de Caracterização	Descrição	Evidências
Objeto	Objetos mais elementares são coordenados e encapsulados em novos objetos.	Os conceitos de somas por falta e por excesso assumem o estatuto de objetos matemáticos e quando vistos como processos são coordenados e encapsulados no conceito de integral de Lebesgue.
Propriedades	Demonstração de uma compreensão avançada das implicações matemáticas das propriedades e domínio da linguagem simbólica.	O estudante faz uso correto dos símbolos e propriedades, demonstrando entendimento dos significados.
Tradução entre Representações	Não apresenta inconsistências entre representações e utiliza notação matemática precisa.	Os conceitos são traduzidos simbolicamente sem erros conceituais. O estudante faz a escrita algébrica das somas por falta e por excesso utilizando a notação de somatório e conclui sobre a integrabilidade a Lebesgue.
Processos e Pensamento *Proceptual*	Desenvolvimento de um processo matemático altamente elaborado e estruturado e articulação clara das componentes processual e conceitual.	É possível observar os componentes processual e conceitual em interação, por exemplo: ele observa que, independentemente do particionamento, as somas inferiores são sempre 0 (considerando que y_{k-1} é o menor valor da função em cada um dos intervalos da partição) e as somas superiores são sempre 1 (considerando que y_k é o maior valor da função em cada um dos intervalos da partição). A partir disso, o estudante conclui que, devido às propriedades da função de Dirichlet, os limites das somas inferior e superior convergem para o mesmo valor. Portanto, sendo integrável à Lebesgue.

Fonte: Autoria própria.

Apesar do potencial das atividades, a aplicação revelou algumas limitações. A ausência de momentos de síntese ao final de cada unidade dificultou a organização dos conceitos trabalhados. Além disso, algumas tarefas exigiam reformulação, seja por excesso de atividades, ou para melhorar os enunciados, procurando melhor adequar ao tempo.

Com base nos registros em diário de campo, nas discussões com o grupo de colaboração e nas respostas dos estudantes, foram identificados pontos de refinamentos para o segundo ciclo. Os principais são:

- Redução e reordenação das atividades em cada unidade;
- Reformulação de enunciados;
- Inserção de momentos de síntese estruturados ao final de cada unidade, com uso de esquemas sínteses.

3.2 SEGUNDO CICLO: REFINAMENTOS E NOVOS RESULTADOS

O segundo ciclo foi realizado em 2023, na mesma disciplina e instituição do ciclo anterior, mas com uma nova turma de estudantes da licenciatura em Matemática. Com base na análise crítica do primeiro ciclo, foram implementados diversos refinamentos no produto educacional e na forma de aplicação.

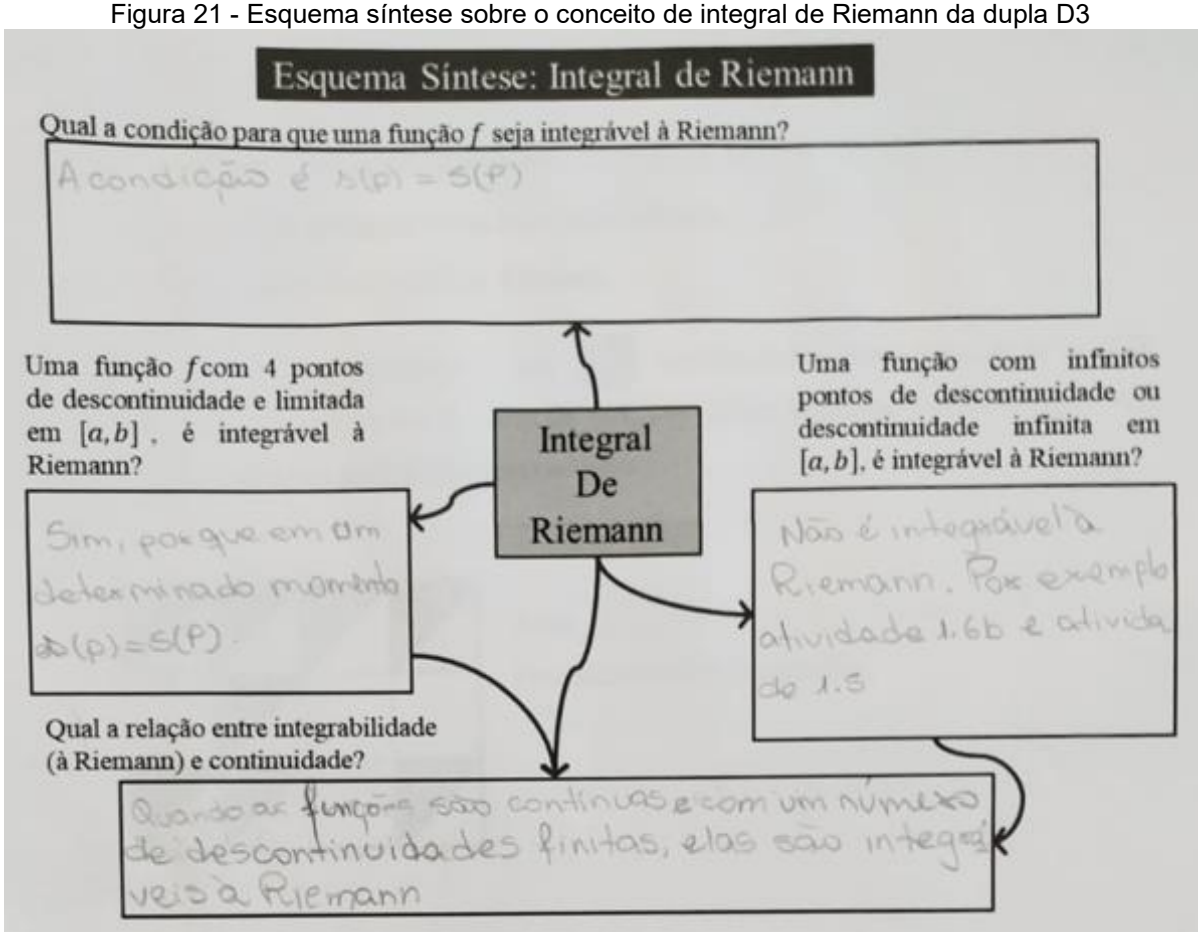
Entre as principais modificações estiveram:

- A redução da carga de atividades em cada unidade, permitindo maior profundidade nas discussões;
- A reescrita de enunciados, buscando maior clareza e alinhamento com os objetivos conceituais;
- A inserção de momentos de síntese estruturados ao final de cada unidade, com o uso de esquemas visuais elaborados pelos estudantes ou coletivamente com mediação docente;

Apesar de limitações estruturais, como a carga horária concentrada em um único turno, diferentemente do primeiro ciclo em que as aulas eram em dois dias com 2h aula em cada, os resultados obtidos no segundo ciclo revelaram uma evolução qualitativa nas imagens do conceito dos estudantes. As produções passaram a apresentar maior articulação entre os elementos do conceito de integral, demonstrando compreensão mais global da ideia de limite no conceito de integral de Riemann.

A Figura 2 apresenta um exemplo de esquema síntese da dupla D3 feito ao final da Unidade 1, no qual se observa a tentativa de integrar diferentes aspectos da definição da integral de Riemann, evidenciando avanços em relação à linearidade observada no ciclo anterior.

Figura 21 - Esquema síntese sobre o conceito de integral de Riemann da dupla D3



Fonte: Autoria própria.

Nessas produções, observou-se a presença de generalizações, articulação entre registros e justificativas em linguagem natural que iam além da aplicação de algoritmos ou técnicas procedimentais.

Esses resultados e, a concentração das imagens do conceito nos níveis Intermediário ou Avançado, apontam que as alterações realizadas no desenho da intervenção contribuíram para a compreensão dos conceitos e para o desenvolvimento de aspectos do pensamento matemático avançado.

3.3 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS CICLOS

A comparação entre os dois ciclos da intervenção permite evidenciar avanços importantes no processo de aprendizagem dos estudantes e no aperfeiçoamento do produto educacional.

No primeiro ciclo, os estudantes demonstraram esforço em articular os conceitos abordados, mas muitas vezes apresentaram compreensões fragmentadas, com dificuldades em estabelecer relações mais amplas entre as ideias. A ausência de momentos de síntese estruturados e a quantidade excessiva de atividades dificultaram a consolidação das aprendizagens e a organização dos conteúdos.

No segundo ciclo, os refinamentos implementados — como a reformulação de atividades, a redução e reordenação das propostas, e a introdução dos esquemas de síntese — contribuíram para tornar as compreensões mais claras e articuladas. Ainda que a quantidade de manifestações nos níveis Intermediário e Avançado tenha se mantido semelhante, foi possível perceber maior profundidade nas respostas dos estudantes e uma melhor mobilização dos conceitos ao longo das três unidades.

Um aspecto externo que também impactou a aplicação foi a diferença na carga horária da disciplina: em 2022, as aulas eram distribuídas em dois encontros semanais de duas horas; já em 2023, concentraram-se em um único encontro de quatro horas. Essa mudança influenciou o ritmo de trabalho e a dinâmica das discussões em sala, exigindo adaptações tanto do pesquisador quanto do docente da disciplina.

O Quadro 2 sintetiza os principais aspectos observados em cada ciclo, destacando os elementos que foram ajustados e seus efeitos sobre a aprendizagem dos estudantes.

Quadro 2: Comparação entre ciclo 1 e ciclo 2 – ajustes e efeitos observados

Aspecto	Mudança entre os ciclos	Resultados observados
Quantidade de atividades	Redução e reorganização das atividades por unidade	Maior foco conceitual e aprofundamento nas discussões; compreensões mais articuladas com menos sobrecarga de manipulações matemáticas.
Momentos de síntese	Inserção de esquemas síntese ao final de cada unidade.	Melhoria na organização das ideias e nas conexões entre conceitos ao longo das unidades.
Enunciados das atividades	Reformulação de enunciados para maior clareza e intencionalidade didática.	Maior clareza nas atividades; respostas mais alinhadas ao objetivo conceitual das tarefas.
Carga horária	Aulas passaram de dois encontros semanais de 2h para um único encontro de 4h.	Ritmo mais lento, exigindo ajustes na dinâmica; dificuldade de foco nas horas finais da aula.

Níveis de imagem do conceito	Concentrados nos níveis Intermediário e Avançado em ambos os ciclos.	Compreensões mais profundas e justificadas no segundo ciclo, mesmo com número similar de classificações por nível.

Fonte: Autoria própria.

Os resultados reforçam a importância da avaliação formativa, da colaboração docente e do uso da Metodologia de Pesquisa Baseada em Design como caminho para desenvolver intervenções eficazes e ajustadas à realidade dos estudantes.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise comparativa entre dois ciclos de uma intervenção didática desenvolvida com base na Metodologia de Pesquisa Baseada em Design (PBD), voltada à aprendizagem dos conceitos de integrais de Riemann e de Lebesgue por licenciandos em Matemática. Fundamentada na teoria da Imagem do Conceito e Definição do Conceito, a proposta foi aplicada em turmas distintas, ao longo de dois anos consecutivos, permitindo o refinamento progressivo das atividades e estratégias de ensino.

A comparação entre os ciclos evidenciou que, embora os níveis de imagem do conceito tenham se mantido majoritariamente nos níveis Intermediário e Avançado, houve avanços qualitativos significativos no segundo ciclo. Tais avanços ocorreram mesmo com a redução do número de atividades, o que reforça a importância da intencionalidade pedagógica na organização dos conteúdos, da clareza nos enunciados e da inserção de momentos de síntese como recursos fundamentais para favorecer a construção de compreensões mais articuladas e profundas.

Os resultados obtidos demonstram que o uso da PBD contribuiu de forma efetiva para a melhoria da proposta educacional, ao permitir uma escuta atenta dos dados do primeiro ciclo e a realização de ajustes contextualizados. A lógica cíclica da metodologia, aliada à reflexão colaborativa, mostrou-se potente para aprimorar continuamente a intervenção e produzir conhecimento relevante para a formação de professores.

Como desdobramento, espera-se que os princípios de design derivados desta experiência possam orientar novas propostas didáticas voltadas ao ensino de conteúdos matemáticos complexos, tanto no ensino superior quanto na educação básica. Além disso, destaca-se a importância de valorizar a articulação entre teoria e prática na formação de professores, promovendo a construção de sentidos mais

sólidos sobre os conceitos matemáticos fundamentais na formação do professor de matemática.

REFERÊNCIAS

GONZÁLEZ-MARTÍN, Antonio Sebastián Díaz. Dificultades en el aprendizaje del concepto de integral definida. **Revista EMA**, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 85–104, 2006.

MENONCINI, Vanessa Giesel. **A compreensão de futuros professores de Matemática sobre a integral de Riemann**. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

PLOMP, Tjeerd. Educational design research: an introduction. In: PLOMP, Tjeerd; NIEVEEN, Nienke (ed.). **An introduction to educational design research**. Enschede: SLO, 2007. p. 9–35.

REIS, Lílian Pereira dos. **Dificuldades de aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um estudo com licenciandos em Matemática**. 2015. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht, v. 12, n. 2, p. 151–169, 1981.